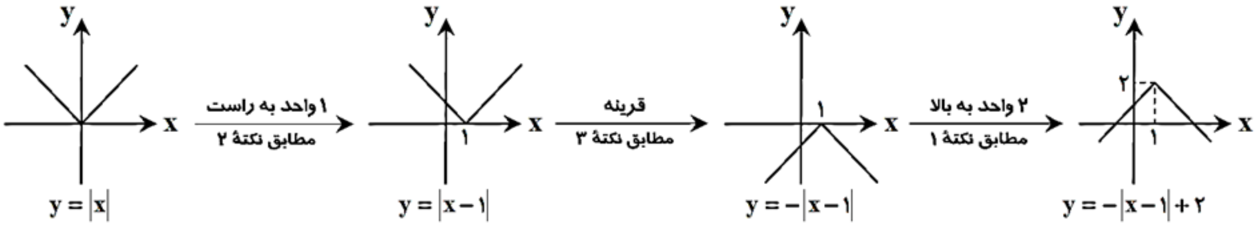
حسابان

۱ گزینه ۳

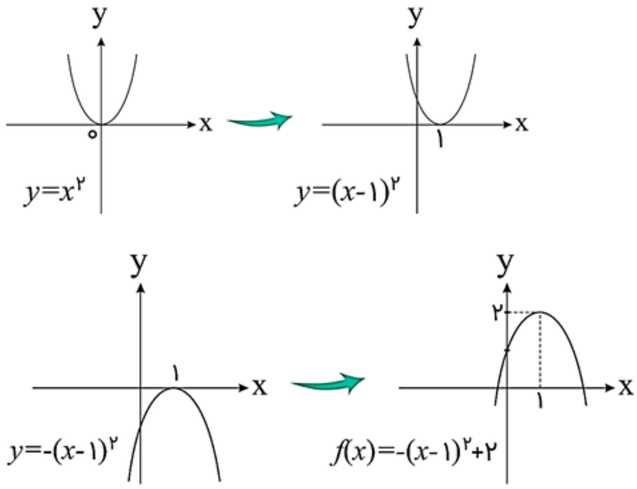
نکتهٔ ۱: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به‌اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به دست آورد. اگر $k>0$، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$، انتقال در جهت منفی خواهد بود.
نکتهٔ ۲: برای رسم تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>0$، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ انتقال در جهت مثبت خواهد بود.
نکتهٔ ۳: برای رسم نمودار تابع $-f(x)$ کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.
برای رسم این تابع، مراحل زیر را طی می‌کنیم:



ریاضی

۲ گزینه ۳

با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=x^۲$، نمودار تابع $y=-(x-۱)^۲+۲$ را به دست می‌آوریم.



توجه کنید که نمودار گزینهٔ "۲" نادرست است؛ چون با $f(۰)=-۱+۲=۱$ مطابقت ندارد.

۳ گزینه ۴

در بازهٔ $[-۱,۰]$ نمودار تابع به‌صورت خط افقی با عرض برابر با یک است. در بازهٔ $(۰,۳]$ نمودار تابع به‌صورت بخشی از سهمی به معادلهٔ $y_۱=x^۲-۱$ است. مقدار تابع $y_۱$ در صفر برابر با -۱ و در $x=۳$ برابر با ۸ است. توجه کنید که چون $x=۰$ جزء بازهٔ $(۰,۳]$ نیست، نمودار سهمی را در این نقطه به‌صورت توخالی رسم می‌کنیم. در بازهٔ $(۳,+\infty)$ نمودار تابع به‌صورت خطی افقی با عرض برابر با ۲ است. توجه کنید که $x=۳$ نیز جزء بازهٔ $(۳,+\infty)$ نیست و خط در این نقطه باید توخالی رسم شود. باتوجه‌به توضیحات داده‌شده، نمودار گزینهٔ "۴" جواب است.

۴ گزینه ۳

$$y=|x-۱|\xrightarrow[\text{محورها به سمت پایین}y]{\text{یک واحد در راستای}}y=|x-۱|-۱$$

$$\xrightarrow[x\text{ها به سمت چپ}]{\text{دو واحد در راستای محور}}y=|x+۲-۱|-۱$$

$$\Rightarrow y=|x+۱|-۱\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور}x\text{ها}}y=-|x+۱|+۱$$

۵ گزینه ۲

نکته: برای به دست آوردن محل تقاطع نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ باید معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنیم.

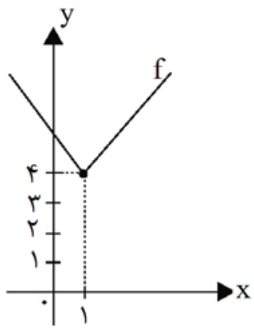
$$۴x^{۲}+۱\xrightarrow{\text{۳واحد به چپ}}۴(x+۳)^{۲}+۱\xrightarrow{\text{۱واحد به بالا}}۴(x+۳)^{۲}+۱+۱$$

بنابراین ضابطهٔ نمودار جدید به‌صورت $g(x)=۴(x+۳)^{۲}+۲$ است. حال معادلهٔ موردنظر را حل می‌کنیم:

$$g(x)=f(x)\Rightarrow ۴(x+۳)^{۲}+۲=۴x^{۲}+۱\Rightarrow ۴(x^{۲}+۶x+۹)+۲=۴x^{۲}+۱\Rightarrow ۴x^{۲}+۲۴x+۳۶+۲$$
$$=۴x^{۲}+۱\Rightarrow ۲۴x=-۳۷\Rightarrow x=-\frac{۳۷}{۲۴}$$

۶ گزینه ۳

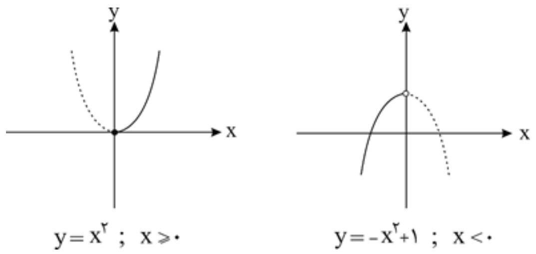
ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. می‌دانیم $|x-۱|=|۱-x|$؛ بنابراین نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+۴$ را می‌توان با انتقال تابع $y=|x|$ به‌اندازهٔ یک واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا رسم کرد.



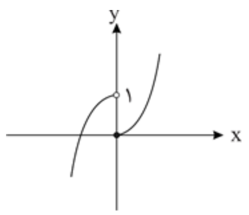
همان‌طور که در شکل مشخص است، برد این تابع شامل مقادیر طبیعی ۳، ۲ و ۱ نیست.

۷ گزینه ۲

ابتدا هریک از ضابطه‌ها را جداگانه رسم می‌کنیم:



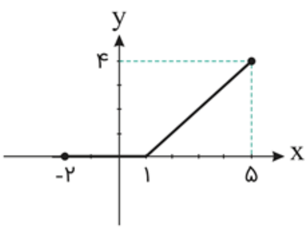
پس نمودار نهایی مطابق شکل زیر است:



بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۸ گزینه ۴

برای رسم نمودار تابع $f(x-۲)+۲$، باید نمودار تابع f را دو واحد به‌سمت بالا و دو واحد به‌سمت راست انتقال داد، درنتیجه:



۹ گزینه ۲

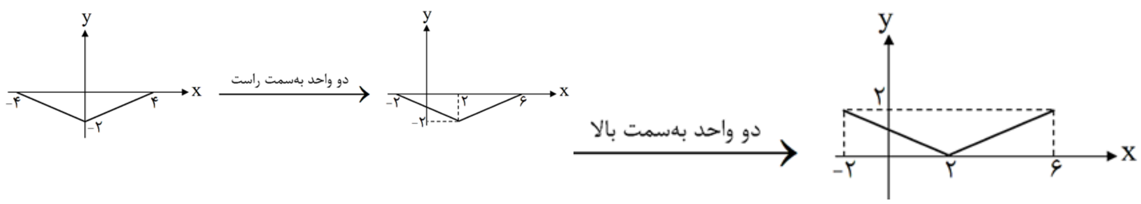
انتقال تابع با ۲ واحد به‌سمت راست : $x \Rightarrow x-۲$

انتقال تابع با ۵ واحد به‌سمت پایین : $y \Rightarrow y-۵$

$$g(x)=\begin{cases}(x-۲)^{۲}-۱۰-۵ & ;x-۲\geq ۱\\ ۳(x-۲)-۱-۵ & ;x-۲<۱\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}x^{۲}-۴x-۱۱ & ;x\geq ۳\\ ۳x-۱۲ & ;x<۳\end{cases}$$

۱۰ گزینه ۳

مطابق نمودار گزینهٔ "۳" اگر نمودار تابع $y=f(x)$ دو واحد به‌سمت راست و دو واحد به‌سمت بالا منتقل شود، نمودار تابع $y=f(x-۲)+۲$ به دست می‌آید.

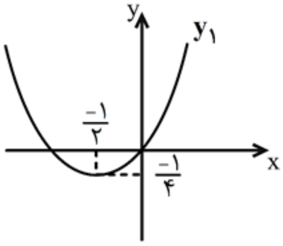


۱۱ **گزینه ۱**

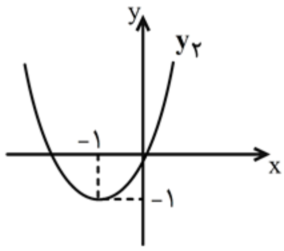
با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^۲$ و تبدیل نمودارها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_۱ = x^۲ + x = (x + \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} \\ y_۲ = x^۲ + ۲x = (x + ۱)^۲ - ۱ \end{cases}$$

بنابراین برای رسم نمودار تابع $y_۱$، کافی است نمودار تابع $y = x^۲$ را $\frac{۱}{۲}$ واحد به چپ و سپس $\frac{۱}{۴}$ واحد به پایین انتقال دهیم.



به طریق مشابه، برای رسم نمودار تابع $y_۲ = x^۲ + ۲x$، کافی است نمودار تابع $y = x^۲$ را ۱ واحد به چپ و سپس ۱ واحد به پایین انتقال دهیم.



بنابراین اگر بخواهیم نمودار $y_۱ = x^۲ + x$ را به $y_۲ = x^۲ + ۲x$ تبدیل کنیم باید نمودار $y_۱$ به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ واحد به چپ و سپس $\frac{۳}{۴}$ واحد به پایین انتقال یابد.

۱۲ **گزینه ۲**

دامنه و برد تابع $f(x)$ برابرند با:

$$D_f = [-۳, ۲) - \{-۲\}$$

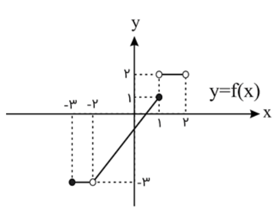
$$R_f = [-۳, ۱] \bigcup \{۲\}$$

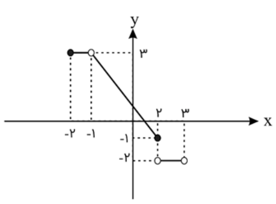
دامنهٔ تابع $-f(x-۱)$ با دامنهٔ $f(x-۱)$ برابر است. نمودار تابع $f(x-۱)$ از انتقال نمودار تابع f به‌اندازهٔ یک واحد به‌سمت راست به دست می‌آید.

$$D_{f(x)} = [-۳, ۲) - \{-۲\} \Rightarrow D_{-f(x-۱)} = [-۲, ۳) - \{-۱\}$$

برد تابع $-f(x-۱)$ با قرینهٔ برد تابع $f(x)$ برابر است:

$$R_{f(x)} = [-۳, ۱] \bigcup \{۲\} \Rightarrow R_{-f(x-۱)} = [-۱, ۳] \bigcup \{-۲\}$$



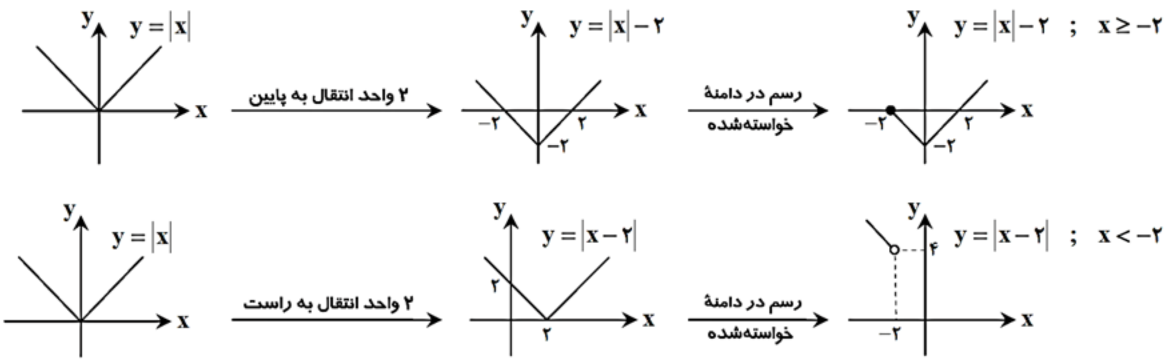


۱۳ گزینه ۳

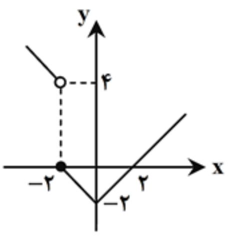
نکته: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در راستای محور yها انتقال دهیم. اگر $k > 0$، انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$، انتخاب در جهت منفی است.

نکته: برای رسم نمودار $f(x + k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را به‌اندازهٔ k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k > 0$، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

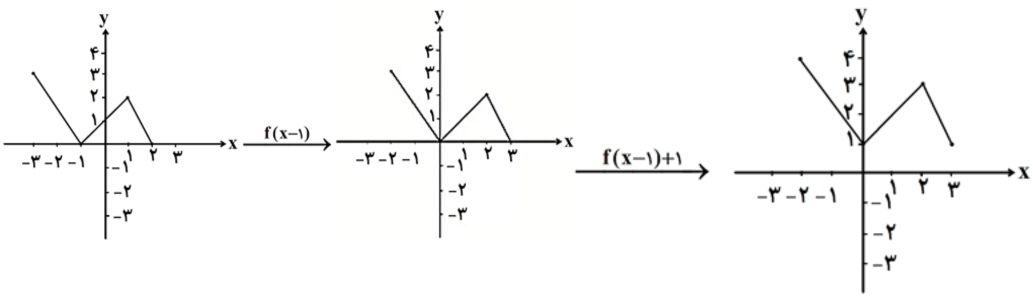
ابتدا هرکدام از نمودارهای داده‌شده را در دامنهٔ خواسته‌شده رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار این تابع چند ضابطه‌ای به‌صورت زیر است:

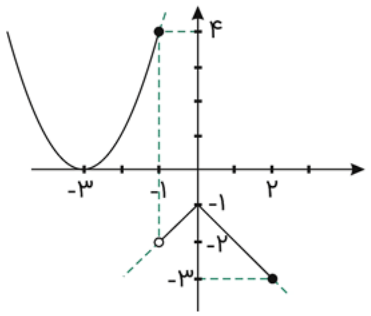


۱۴ گزینه ۳



۱۵ گزینه ۲

ابتدا تابع $f(x)$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم. برای رسم تابع $y=(x+۳)^۲$ نمودار $y=x^۲$ را به‌اندازهٔ ۳ واحد به‌سمت چپ منتقل می‌کنیم و برای رسم تابع $y=-|x|-۱$ تابع $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا $y=-|x|$ به دست آید.
سپس آن را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا تابع $y=-|x|-۱$ رسم شود. حال باتوجه‌به شکل $f(x)$، برد آن به‌صورت زیر است:



$$f\,\text{برد} = [-۳,-۱]\bigcup[۰,+\infty)=[a,b]\bigcup[c,+\infty)$$

$$\Rightarrow a=-۳\,,\, b=-۱,\, c=۰ \Rightarrow a+b+c=-۴$$

حسابان

۱۶ گزینه ۳

ابتدا در مرحلهٔ اول، نمودار f را در راستای محور yها، دو برابر منقبض کرده و در مرحلهٔ دوم، آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. در مرحلهٔ سوم، نمودار را سه واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(۱)} y=\frac{f(x)}{۲}\xrightarrow{(۲)} y=\frac{-f(x)}{۲}\xrightarrow{(۳)} y=\frac{-f(x+۳)}{۲}$$

۱۷ گزینه ۴

فرض کنید تابع پس از انبساط و انتقال مطرح‌شده در صورت سؤال به فرم $f(ax+b)$ تبدیل شده باشد. حال انبساط و انتقال را در جهت عکس انجام می‌دهیم تا به تابع اولیهٔ $f(x)$ برسیم. درنتیجه ابتدا تابع را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، داریم:

$$f(a(x-۲)+b)$$

سپس تابع را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ انقباض افقی می‌دهیم، داریم:

$$f(a(۲x-۲)+b)$$

حال از تساوی $f(a(۲x-۲)+b)=f(x)$ مقادیر a و b را پیدا می‌کنیم:

$$۲ax-۲a+b=x\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۱}{۲}\\ b=۱\end{cases}$$

پس جواب سؤال $f(\frac{۱}{۲}x+۱)$ است.

۱۸ گزینه ۳

باید تابع نسبت به محور yها قرینه شود و همچنین xهای آن $\frac{۱}{۳}$ گردد و در آخر نمودار $\frac{۱}{۳}$ به سمت راست منتقل گردد.

۱۹ گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$x \to -x \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{-x}$$

$$\text{گزینهٔ ۱}: \begin{cases} x \to x-۱ \Rightarrow \sqrt{-x} \to \sqrt{-(x-۱)} = \sqrt{-x+۱} \\ x \to \frac{۱}{۳}x \Rightarrow \sqrt{-x+۱} \Rightarrow \sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱} \end{cases}$$

$$x \to x+۱ \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{x+۱}$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: \begin{cases} x \to -x \Rightarrow \sqrt{x+۱} \to \sqrt{-x+۱} \\ x \to \frac{۱}{۳}x \Rightarrow \sqrt{-x+۱} \to \sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱} \end{cases}$$

$$x \to -x \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{-x}$$

$$\text{گزینهٔ ۳}: \begin{cases} x \to \frac{۱}{۳}x \Rightarrow \sqrt{-x} \to \sqrt{-\frac{۱}{۳}x} \\ x \to x+۱ \Rightarrow \sqrt{-\frac{۱}{۳}x} \to \sqrt{-\frac{۱}{۳}(x+۱)} = \sqrt{-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}} \end{cases}$$

$$x \to -x \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{-x}$$

$$\text{گزینهٔ ۴}: \begin{cases} x \to \frac{۱}{۳}x \Rightarrow \sqrt{-x} \to \sqrt{-\frac{۱}{۳}x} \\ x \to x-۳ \Rightarrow \sqrt{-\frac{۱}{۳}x} \to \sqrt{-\frac{۱}{۳}(x-۳)} = \sqrt{-\frac{۱}{۳}x+۱} \end{cases}$$

۲۰ گزینه ۴

$$-۱ \le f(x) \le ۱ \Rightarrow -۱ \le f(\frac{x}{۲}) \le ۱ \Rightarrow -۳ \le ۳f(\frac{x}{۲}) \le ۳$$
$$\Rightarrow -۲ \le ۱+۳f(\frac{x}{۲}) \le ۴ \Rightarrow -۲ \le y \le ۴$$

ریاضی

۲۱ گزینه ۴

اگر $x = ۰$ را در تابع قرار دهیم محل برخورد با محور yها به دست می‌آید.

$$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \times ۲^{۰+۱} + ۲ = ۶$$

باتوجه‌به اینکه کمترین مقدار تابع نمی‌تواند کمتر یا مساوی ۲ باشد، پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

حسابان

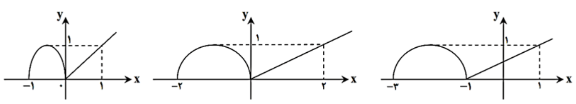
۲۲ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$y = f(۲x) \xrightarrow[\text{نمودار در جهت محور } x\text{ها دو برابر می‌شود (انبساط طولی)}]{x \to \frac{x}{۲}} y = f(x) \xrightarrow[\text{نمودار در جهت محور } x\text{ها به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ منتقل می‌شود}]{x \to x+۱} y = f(x+$$

راه‌حل دوم:

مطابق شکل در نمودار $y = f(۲x)$ داریم:



$$x = ۱ \Rightarrow f(۲x) = f(۲) = ۱ \Rightarrow y = f(x+۱) \xrightarrow{x=۱} f(۲) = ۱$$

پس در نمودار جدید نیز، نقطهٔ $(۱,۱)$ روی نمودار است. تنها گزینهٔ ۳ این ویژگی را دارد.

۲۳ گزینه ۲

ضابطهٔ نمودار قسمت "الف" باید به‌صورت $y = \sqrt{-x+۱}+۱$ باشد.

ضابطهٔ قسمت "ب" که درست است. ضابطهٔ قسمت "پ" نیز باید به‌صورت $y = \sqrt{x+۱}-۱$ باشد.

۲۴ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $y = f(x)$ داریم:

$$۰ \le f(x) < ۳$$

$$\Rightarrow ۱۶ \le f^{۲}(x) + ۱۶ < ۲۵ \Rightarrow ۴ \le \sqrt{f^{۲}(x)+۱۶} < ۵$$

$$\xrightarrow{\times(-۲)} -۱۰ < -۲\sqrt{f^{۲}(x)+۱۶} \le -۸$$

$$\xrightarrow{+۳} -۷ < ۳ - ۲\sqrt{f^{۲}(x)+۱۶} \le -۵ \Rightarrow R_y = (-۷, -۵]$$

۲۵ گزینه ۲

ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x+۱)$ به دست آید. سپس نمودار را در راستای محور طول‌ها با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض می‌کنیم تا نمودار تابع $f(۲x+۱)$ به دست آید. سپس نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(۱-۲x)$ به دست آید. سپس نمودار را با ضریب ۲ در راستای محور yها منبسط می‌کنیم تا نمودار تابع $۲f(۱-۲x)$ به دست آید و در انتها نمودار را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = ۲f(۱-۲x) - ۱$ حاصل شود.